DS n°1 : Logique

Noté sur 40 pts ±2 pts pour le soin et la clarté,
puis la note est divisée par 2 pour une note sur 20.

Exercice 1 : Raisonnements et un peu d'ensembles (15 pts)

1) (3 pts) Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad 1 \times 2 + 2 \times 3 + \cdots + n \times (n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

On raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

- (Initialisation) Avec $n = 1$, on a

$$1 \times 2 = 2 \qquad \text{et} \qquad \frac{1(1+1)(1+2)}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

donc la propriété est vraie pour $n = 1$.

- (Hérédité) Supposons la propriété vraie à un rang fixé $n \in \mathbb{N}^*$. Montrons-la pour le rang $n+1$.

$$\begin{aligned} & 1 \times 2 + \cdots + n \times (n+1) + (n+1) \times (n+2) \\ =& \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + (n+1) \times (n+2) \qquad \text{par hypothèse de récurrence} \\ =& (n+1)(n+2) \times \left(\frac{n}{3} + 1\right) \\ =& \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3} \end{aligned}$$

La propriété est donc vraie au rang $n+1$.

- (Conclusion) Ainsi, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2) (3 pts) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{Z} \qquad n^2 + n \text{ est divisible par } 2$$

Soit $n \in \mathbb{Z}$.

- Si n est pair, alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k$. Alors

$$n^2 + n = n(n+1) = 2\underbrace{k(2k+1)}_{k'} = 2k'$$

Donc $n^2 + n$ est divisible par 2.

- Si n est impair, alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k+1$. Alors

$$n^2 + n = n(n+1) = (2k+1)(2k+2) = 2\underbrace{(2k+1)(k+1)}_{k'} = 2k'$$

donc $n^2 + n$ est divisible par 2.

Ainsi, dans tous les cas, $n^2 + n$ est divisible par 2.

3) (3 pts) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{Z} \qquad \left(n^2 - 1 \text{ n'est pas divisible par } 8\right) \implies (n \text{ est pair})$$

Soit $n \in \mathbb{Z}$. Par contraposée, il suffit de montrer que

$$(n \text{ est impair}) \implies \left(n^2 - 1 \text{ est divisible par } 8\right)$$

Supposons que n est impair. Alors, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$n = 2k + 1$$

Alors,

$$n^2 - 1 = (2k+1)^2 - 1 = 4k^2 + 4k = 4(k^2 + k)$$

Or, par la question **2)**, $k^2 + k$ est divisible par 2, donc il existe $p \in \mathbb{Z}$ tel que

$$k^2 + k = 2p$$

Ainsi,

$$n^2 - 1 = 4 \times 2p = 8p$$

ce qui entraine que $n^2 - 1$ est divisible par 8. D'où le résultat.

4) On considère l'assertion suivante :

$$P : \quad \forall a \in \mathbb{R} \quad \forall b \in \mathbb{R} \qquad (ab \geq a) \implies (a \leq 0 \quad \text{ou} \quad b \geq 1)$$

a) **(1 pt)** Écrire la négation de P.

$$\text{non}P : \quad \exists a \in \mathbb{R} \quad \exists b \in \mathbb{R} \qquad ab \geq a \qquad \text{et} \qquad a > 0 \qquad \text{et} \qquad b < 1$$

b) **(2 pts)** Réécrire P en passant par la contraposée. En déduire (avec justification) si P est vraie.

$$P : \quad \forall a \in \mathbb{R} \quad \forall b \in \mathbb{R} \qquad (a > 0 \quad \text{et} \quad b < 1) \implies (ab < a)$$

Montrons que l'assertion ci-dessus est vraie. Soit a, b deux réels. Supposons que $a > 0$ et $b < 1$. Alors, en multipliant l'inégalité $b < 1$ par le réel $a > 0$, on obtient bien

$$ab < a$$

donc P est vraie.

5) **(3 pts)** Que vaut $\mathscr{P}(\mathscr{P}(\{1\}))$?

$\mathscr{P}(\{1\}) = \{\varnothing, \{1\}\}$ donc

$$\mathscr{P}(\mathscr{P}(\{1\})) = \{\varnothing, \quad , \{\varnothing\} \quad , \{\{1\}\} \quad \{\varnothing, \{1\}\}\}$$

Problème : équation fonctionnelle (25 pts)

On veut déterminer toutes les applications $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad f(n) + f(f(n)) = 2n \tag{E}$$

1) **(1,5 pts)** On pose la fonction $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par $g(n) = n$. Montrer que g vérifie l'équation (E).

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$g(n) + g(g(n)) = n + g(n) = n + n = 2n$$

donc g vérifie (E).

2) Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ qui vérifie (E).

a) **(4 pts)** Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \qquad f(n) \in [\![0, 2n]\!]$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme f est à valeurs dans $\mathbb{N}$, on a $f(n) \geq 0$. Montrons que $f(n) \leq 2n$. Comme $f(f(n)) \geq 0$, on a

$$f(n) = 2n - f(f(n)) \leq 2n$$

Finalement, $f(n) \in [\![0, 2n]\!]$.

b) **(1,5 pts)** En déduire $f(0)$.

Par la question précédente, on a $f(0) \in [\![0, 2 \times 0]\!] = \{0\}$. Ainsi, $\boxed{f(0) = 0}$.

(On peut aussi remplacer n par 0 dans l'équation (E) pour arriver au résultat.)

c) **(4 pts)** En raisonnant par disjonction de cas, déterminer $f(1)$.

Par la question **a)** , on a $f(1) \in [\![0, 2]\!] = \{0, 1, 2\}$.

- Si $f(1) = 0$, alors par l'équation (E)

$$\begin{aligned} & f(1) + f(f(1)) = 2 \\ \implies & 0 + f(0) = 2 \\ \implies & 0 + 0 = 2 \end{aligned}$$

  ce qui est absurde. Donc $f(1) \neq 0$.

- Si $f(1) = 2$, alors par l'équation (E) on a

$$\begin{aligned} & f(1) + f(f(1)) = 2 \\ \implies & 2 + f(2) = 2 \\ \implies & f(2) = 0 \end{aligned}$$

Or, on a également

$$\begin{aligned} & f(2)+f(f(2))=4 \\ \Longrightarrow\ & 0+f(0)=4 \\ \Longrightarrow\ & 0+0=4 \end{aligned}$$

ce qui est absurde. Donc $f(1)\neq 2$.

- Ainsi, on a nécessairement $\boxed{f(1)=1}$.

d) **(4 pts)** Montrer que :

$$\forall m,n\in\mathbb{N} \qquad (f(m)=f(n) \implies m=n)$$

Soit $m,n\in\mathbb{N}$. On suppose que $f(m)=f(n)$. Alors, on a

$$\begin{aligned} 2n &= f(n)+f(f(n)) \\ &= f(m)+f(f(m)) \\ &= 2m \end{aligned}$$

donc $n=m$.

e) **(6 pts)** Soit $n\in\mathbb{N}$. On suppose que

$$\forall k\in[\![0,n]\!] \qquad f(k)=k$$

En raisonnant par l'absurde, montrer que $f(n+1)\geq n+1$, puis que $f(n+1)\leq n+1$. Conclure.

Supposons par l'absurde que $f(n+1)<n+1$. Alors si on pose $m=f(n+1)$, comme $m\in[\![0,n]\!]$, on a $f(m)=m$ par hypothèse. Ainsi,

$$f(m)=m=f(n+1)$$

Par la question **d)** , cela entraine que $m=n+1$, ce qui est absurde. Donc $\boxed{f(n+1)\geq n+1}$.

Supposons par l'absurde que $f(n+1)>n+1$. Par la question **a)** , on a donc $f(n+1)\in[\![n+2,2(n+1)]\!]$. Or, on a

$$f(n+1)+f(f(n+1))=2(n+1)$$

ainsi,

$$f(f(n+1))=2(n+1)-f(n+1)$$

Comme $f(n+1)\geq n+2$, cela entraine que

$$f(f(n+1))\leq 2(n+1)-(n+2)$$

c'est-à-dire

$$0\leq f(f(n+1))\leq n$$

Cela implique qu'il existe $m\in[\![0,n]\!]$ tel que $f(f(n+1))=m$. De plus, par hypothèse, $f(m)=m$. Donc

$$f(f(n+1))=f(m)$$

On en déduit que $f(n+1)=m$ par la question **d)** . Ainsi, $f(n+1)\leq n$. Contradiction car on a supposé que $f(n+1)>n+1$. Finalement, $\boxed{f(n+1)\leq n+1}$.

Comme $n+1\leq f(n+1)\leq n+1$, cela conduit à $\boxed{f(n+1)=n+1}$.

f) **(2 pts)** En déduire que $\forall n\in\mathbb{N} \qquad f(n)=n$.

On raisonne par récurrence **forte** sur n. On pose $H_n : f(n)=n$.

- Pour $n=0$, on a vu que $f(0)=0$ par la question **b)** , donc H_0 est vraie.
- Soit $n\in\mathbb{N}$. On suppose que $H_0,H_1,\cdots,H_n$ sont vraies. Alors, H_{n+1} est vraie également par la question **e)** .

Ainsi, H_n est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$. D'où le résultat.

3) **(2 pts)** Conclure, en précisant le type de raisonnement utilisé.

On a raisonné par analyse-synthèse. Par l'analyse (questions **a)** à **f)**), la seule fonction susceptible d'être solution de (E) est la fonction

$$\begin{aligned} g:\mathbb{N}&\to\mathbb{N} \\ n&\mapsto n \end{aligned}$$

Par la synthèse (question **1)**), cette fonction est effectivement solution. Donc la seule solution de (E) est la fonction g : $\boxed{\mathcal{S}=\{g\}}$.